Colegio España
Concepción 2020
Profesora Karinna Linares Avello

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
COLEGIO ESPAÑA - CONCEPCIÓN

Guía de Aprendizaje N°5
Ecuaciones Cuadráticas
Tercero Medio

Nombre: Curso: Fecha:

Objetivo de Aprendizaje:
(OA3) Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$: Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.

Importante: No es obligación imprimir esta guía, puedes copiarla y desarrollarla en tu cuaderno, estudiarla desde tu computador o dispositivo móvil. Consultas al correo electrónico karinna@cesp.cl

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Se dice que una ecuación es **cuadrática**, o de segundo grado con una incógnita, cuando después de reducir sus términos semejantes se puede ordenar como: $ax^2 + bx + c = 0$. Los coeficientes a, b y c corresponden a números reales y a debe ser distinto de cero ($a \neq 0$).
Así, por ejemplo, las expresiones de la forma $ax^2 = b$, $(ax + b)^2 = c$, $ax^2 + bx = 0$, y $ax^2 + bx = c$ son ecuaciones cuadráticas.
Una ecuación cuadrática puede tener a lo más **dos soluciones** en los números reales.

ECUACIONES CUADRÁTICAS INCOMPLETAS ~ PURAS

- Para resolver una ecuación de segundo grado en la cual $\boldsymbol{b = 0}$ ***y*** $\boldsymbol{c \neq 0}$, se puede despejar la incógnita de forma directa.

Ejemplo 1:

$a = 4; \quad b = 0; \quad c = -16$

$$\mathbf{4x^2 - 16 = 0}$$
$$4x^2 = 16$$

Despejamos el término cuadrático, dejándolo acompañado de su coeficiente numérico.

$$x^2 = \frac{16}{4}$$
$$x^2 = 4$$

Dividimos por 4, para despejar el término cuadrático. Calculamos el resultado.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$|x| = 2$$

Aplicamos raíz cuadrada en ambas partes de la igualdad y obtenemos resultados.

Recordar que: $\sqrt{x^2} = |x|$

$$x_1 = 2 \ \vee \ x_2 = -2$$

Corresponden a los valores que cumplen la condición anterior de valor absoluto.

Ejemplo 2:

$$\boldsymbol{x(x-5) + 5(x-2) = 10}$$
$$x^2 - 5x + 5x - 10 = 10$$
$$x^2 - 10 - 10 = 0$$
$$x^2 - 20 = 0$$

Para resolver, se debe aplicar la propiedad distributiva, es decir, multiplicar término a término. Luego, reducir términos semejantes y expresar como ecuación cuadrática.

$$\mathbf{x^2 - 20 = 0}$$
$$x^2 = 20 \quad /\sqrt{}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{20}$$
$$|x| = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$x_1 = 2\sqrt{5} \ \vee \ x_2 = -2\sqrt{5}$$

Ejemplo 3:

$$\mathbf{(3x+7)(3x-7)=-4}$$
$$9x^2-49=-4$$
$$9x^2-49+4=0$$
$$9x^2-45=0$$

Para resolver, primero debemos darnos cuenta de que se trata de un producto notable, suma por diferencia, por tanto, se desarrolla de la siguiente manera:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$\mathbf{9x^2-45=0}$$
$$9x^2=45 \quad /:9$$
$$x^2=5 \quad /\sqrt{}$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{5}$$
$$|x|=\sqrt{5}$$
$$x_1=\sqrt{5} \lor x_2=-\sqrt{5}$$

Ejemplo 4:

$$\mathbf{(x+1)^2-2x(x-1)=4x}$$
$$x^2+2x+1-2x^2+2x=4x$$
$$-x^2+4x+1-4x=0$$
$$-x^2+1=0$$

Para resolver el cuadrado de binomio que se encuentra al principio, debemos recordar que:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\mathbf{-x^2+1=0}$$
$$-x^2=-1 \quad /\cdot -1$$
$$x^2=1 \quad /\sqrt{}$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{1}$$
$$|x|=1$$
$$x_1=1 \lor x_2=-1$$

Ejemplo 5:

$$\mathbf{(2x-3)(x+1)=(x-3)(x+2)}$$
$$2x^2+2x-3x-3=x^2+2x-3x-6$$
$$2x^2+2x-3x-3-x^2-2x+3x+6=0$$
$$x^2+3=0$$

$$\mathbf{x^2+3=0}$$
$$x^2=-3 \quad /\sqrt{}$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{-3}$$

No hay soluciones reales

Las raíces cuadradas sólo están definidas para números reales positivos y el cero.

ECUACIONES CUADRÁTICAS INCOMPLETAS ~ BINOMIALES

- Para resolver una ecuación de segundo grado en la cual $\boldsymbol{b \neq 0}$ ***y*** $\boldsymbol{c=0}$, se puede utilizar la factorización y luego resolver.

Ejemplo 1:

$$a=3; \quad b=-5; \quad c=0$$

$$\mathbf{3x^2-5x=0}$$
$$x(3x-5)=0$$
$$x_1=0 \quad o \quad 3x-5=0$$
$$3x=5 \quad /:3$$
$$x_2=\frac{5}{3}$$

Propiedad: Si el producto de dos números es igual a cero, entonces por lo menos uno de los números es igual a cero. Es decir:

$$\boldsymbol{a\cdot b=0 \leftrightarrow a=0 \text{ o } b=0}$$

Se debe encontrar el valor de la segunda solución, despejando la variable x.

Ejemplo 2:

$$\mathbf{5x^2+24x=0}$$
$$x(5x+24)=0$$
$$x_1=0 \quad o \quad 5x+24=0$$
$$5x=-24 \quad /:5$$
$$x_2=-\frac{24}{5}$$

Ejemplo 3:

$$\mathbf{(x-3)(x+5)=-15}$$
$$x^2+5x-3x-15=-15$$
$$x^2+2x-15+15=0$$
$$x^2+2x=0$$
$$x(x+2)=0$$
$$x_1=0 \quad o \quad x+2=0$$
$$x_2=-2$$

Ejemplo 4:

$$\mathbf{(3x+8)(3x-8)=(4x-16)(2x+4)}$$
$$9x^2-24x+24x-64=8x^2+16x-32x-64$$
$$9x^2-64=8x^2-16x-64$$
$$9x^2-64-8x^2+16x+64=0$$
$$x^2+16x=0$$
$$x(x+16)=0$$
$$x_1=0 \quad o \quad x+16=0$$
$$x_2=-16$$

ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETAS

- Sea $ax^2+bx+c=0$ una ecuación de segundo grado con $a\neq 0$, entonces sus soluciones x_1 y x_2 se pueden obtener mediante factorización, cuando es posible, y a través de la fórmula general.

Resolución mediante factorización

No siempre es posible encontrar una factorización del trinomio de una ecuación cuadrática, sin embargo, cuando es posible, permite resolverla de manera inmediata.

Ejemplo 1:

$a=1; \quad b=-3; \quad c=-10$

Debemos encontrar dos números que cumplan estas dos condiciones a la vez:
1) Multiplicados den 10.
2) Sumados (o restados) den 3.

Los números son 5 y 2, porque:
1) $5\cdot 2=10$
2) $5-2=3$

$$\mathbf{x^2-3x-10=0}$$
$$(x-5)(x+2)=0$$
$$x-5=0 \quad o \quad x+2=0$$
$$x_1=5 \quad o \quad x_2=-2$$

Propiedad: Si el producto de dos números es igual a cero, entonces por lo menos uno de los números es igual a cero. Es decir:

$$\boldsymbol{a\cdot b=0 \;\leftrightarrow\; a=0 \text{ o } b=0}$$

Se debe despejar la variable x en ambos casos para encontrar sus dos soluciones.

Respecto a la posición de los números encontrados, se sugiere ubicar el mayor en el primer paréntesis y el menor en el segundo. Lo anterior es requisito para saber qué signo debo poner en cada paréntesis.

- En el primer paréntesis, se debe copiar el signo que acompaña a "b".
- En el segundo paréntesis, se debe poner el resultado de la multiplicación, según la regla de los signos, de aquellos que acompañan a "b" y a "c".

Ejemplo 2:

Dos números que:
1) Multiplicados den 6
2) Sumados (o restados) den 1.

Los números son 3 y 2, porque:
3) $3\cdot 2=6$
4) $3-2=1$

$$\mathbf{x^2-x-6=0}$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$x-3=0 \quad o \quad x+2=0$$
$$x_1=3 \quad o \quad x_2=-2$$

$a=1; \quad b=-1; \quad c=-6$

Ejemplo 3:

Dos números que:

3) Multiplicados den 14
4) Sumados (o restados) den 5.

Los números son 7 y 2, porque:

5) $7 \cdot 2 = 14$
6) $7 - 2 = 5$

$$\boldsymbol{x^2 + 5x - 14 = 0}$$
$$(x+7)(x-2) = 0$$
$$x + 7 = 0 \quad o \quad x - 2 = 0$$
$$x_1 = -7 \quad o \quad x_2 = 2$$

$a = 1; \quad b = 5; \quad c = -14$

Resolución mediante fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1:

$$\boldsymbol{2x^2 - 3x + 1 = 0}$$

$a = 2$

$b = -3$

$c = 1$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{3-1}{4}$$

$$x_1 = \frac{4}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{2}{4}$$

$$x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2:

$$\boldsymbol{-7x^2 - 25x + 12 = 0}$$

$a = -7$

$b = -25$

$c = 12$

$$x = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot -7 \cdot 12}}{2 \cdot -7} = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 336}}{-14} = \frac{25 \pm \sqrt{961}}{-14} = \frac{25 \pm 31}{-14}$$

$$x_1 = \frac{25+31}{-14} \quad ; \quad x_2 = \frac{25-31}{-14}$$

$$x_1 = \frac{56}{-14} \quad ; \quad x_2 = \frac{-6}{-14}$$

$$x_1 = -4 \quad ; \quad x_2 = \frac{3}{7}$$

Ejemplo 3:

$$\boldsymbol{x^2 + 6x - 63 = 0}$$

$a = 1$

$b = 6$

$c = -63$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -63}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 252}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{288}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{144 \cdot 2}}{2} = \frac{-6 \pm 12\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 12\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{-6 - 12\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = -3 + 6\sqrt{2} \quad ; \quad x_2 = -3 - 6\sqrt{2}$$

EJERCICIOS ECUACIONES CUADRÁTICAS INCOMPLETAS

a) $16x^2 - 45 = 0$	g) $7x^2 - 5x = 0$
b) $3x^2 + 16 = 0$	h) $20x^2 - 4x = 0$
c) $(6x + 9)(6x - 9) = 0$	i) $(2x + 9)(x + 8) = 72$
d) $x(x + 3) + 4(2x - 6) = 11x$	j) $(x - 7)(x + 9) = -63$
e) $2x(x + 2) - (x + 3)^2 = -2x$	k) $(x + 6)(2x - 4) = (x - 3)(x + 8)$
f) $(4x + 2)(x - 3) = (x - 8)(x - 2)$	l) $(2x - 5)(2x + 4) = (3x + 10)(x - 2)$

EJERCICIOS ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETAS

a) $x^2 + 7x - 18 = 0$	g) $3x^2 - x - 1 = 0$
b) $x^2 - 11x + 30 = 0$	h) $x^2 - 5x - 4 = 0$
c) $x^2 - 9x + 8 = 0$	i) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
d) $x^2 + 15x + 36 = 0$	j) $(3x - 1)(x + 2) - x(x - 4) = 0$
e) $x^2 - 13x + 42 = 0$	k) $(x - 7)^2 + 2x = (2x - 1)(x - 2)$
f) $x^2 + 10x + 24 = 0$	l) $9x^2 - 2x + 3 = 0$

Para complementar: Escanea los códigos QR desde tu dispositivo móvil o haz click en los links respectivos.

Ecuaciones Cuadráticas Incompletas Puras. Ejercitación. Parte I
https://www.youtube.com/watch?v=InvujKvOaaY&t=189s

Ecuaciones Cuadráticas Incompletas Binomiales. Ejercitación. Parte II
https://www.youtube.com/watch?v=BJ8zkLhJUrI&t=1s

Ecuaciones Cuadráticas Completas. Ejercitación. Parte III
https://www.youtube.com/watch?v=GMlACtPIdss